Varianta 042

Subiectul I

a) $\mathrm{Re}(z)=\frac{3}{5}$.

b) Mijlocul M al segmentului $(CD) \Rightarrow M(5,5)$.

c) $\sin(x+2\pi)=0,8$.

d) $S_{LMN}=\frac{1}{2}\cdot 6=3$.

e) $S=25$.

f) $P=20+10\sqrt{2}$.

Subiectul II

1.

a) Aplicând teorema împărțirii cu rest obținem câtul $X-1$.

b) $p=\frac{12}{126}=\frac{2}{21}$.

c) $(f\circ f)(10)=118$.

d) $x=\frac{5}{3}$.

e) $x_1^3+x_2^3=9$.

2.

a) $f'(x)=2e^x$.

b) $\int_0^1 f(x)dx=2(e-1)$.

c) $x\geq 0 \Rightarrow e^x\geq 1 \Rightarrow f(x)\geq 2$.

d) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2e$.

e) $y=0$ este asimptota oblică spre $-\infty$.

Subiectul III

a) Pentru $a=1;\ b=0 \Rightarrow I_2\in G$ şi pentru $a=1;\ b=2 \Rightarrow A_2\in G$.

b) $\det A_n=1+n^2; n\in \mathbf{Z}$.

c) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c\end{pmatrix}; a,b,c,d\in \mathbf{R} \Rightarrow A+B=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c\end{pmatrix}\in G$

deoarece $a+c\in \mathbf{R}; b+d\in \mathbf{R}$.

d) Calcul direct.

e) $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};\forall n\in\mathbf{N}^*$.

Pentru $n=1$ avem $1^2=\frac{1\cdot2\cdot3}{6}=1$ adevărat.

Presupunem adevărat pentru $n=k$ deci $1^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Vom demonstra că este adevărat şi pentru $n=k+1$, adică

$1^2+2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

$1^2+2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

În baza inducției matematice rezultă $1^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

f) $A^2=\begin{pmatrix}a^2-b^2 & 2ab\\ -2ab & a^2-b^2\end{pmatrix}$.

g) $A_k=\begin{pmatrix}1 & k\\ -k & 1\end{pmatrix}\overset{f)}{\Rightarrow}A_k^2=\begin{pmatrix}1-k^2 & 2k\\ -2k & 1-k^2\end{pmatrix}$.

Atunci $M=\sum_{k=1}^{2007}A_k^2=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{2007}(1-k^2) & 2\sum_{k=1}^{2007}k\\ -2\sum_{k=1}^{2007}k & \sum_{k=1}^{2007}(1-k^2)\end{pmatrix}\overset{not}{=}\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}$.

Deci $m=2x=2\sum_{k=1}^{2007}(1-k^2)<0$.

Subiectul IV

a) $f(x)=\frac{4x+4}{x^2(x+2)^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+2)^2}$, $\forall x>0$.

b) $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}g(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+2)^2}\right)=+\infty$. Deci $x=0$ este asimptota verticală la graficul funcției f.

c) $f'(x)=-\frac{2x}{x^4}+\frac{2(x+2)}{(x+2)^4}=-\frac{2}{x^3}+\frac{2}{(x+2)^3}$, $\forall x>0$.

d) Fie $P(n)$ propoziția $a_n=1-\frac{1}{(2n+1)^2},\forall n\in\mathbf{N}^*$.

Avem $P(1)$ este adevărată.

Presupunem adevărată propoziția pentru $n=k$, $P(k): a_k = 1-\frac{1}{(2k+1)^2}, k\in \mathbf{N}^*$.

Vom arăta că $P(k)\Rightarrow P(k+1)$, adică avem de arătat că $a_{k+1}=1-\frac{1}{(2k+3)^2}$.

$$a_{k+1} = f(1)+f(2)+\ldots+f(2k+1) = a_k + f(2k+1) =$$
$$= 1-\frac{1}{(2k+1)^2}+\frac{1}{(2k+1)^2}-\frac{1}{(2k+3)^2} = 1-\frac{1}{(2k+3)^2}.$$

Deci în baza inducție matematice avem că $a_n = 1-\frac{1}{(2n+1)^2}, \forall n\in \mathbf{N}^*$.

e) $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right) = 1-0 = 1$.

f) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{(2n+1)^2}\right)^{\frac{(2n+1)^2}{-1}\cdot\frac{-1}{(2n+1)^2}\cdot n^2} =$

$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n^2}{(2n+1)^2}} = e^{-\frac{1}{4}}$.

g) $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+2)^2}\right)dx = \left.\left(\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{(x+2)^{-1}}{-1}\right)\right|_1^2 = -\frac{1}{2}+1+\frac{1}{4}-\frac{1}{3} = \frac{5}{12}$.